SOSCIED Vol. 6 No. 1 Juli 2023
p-ISSN : 2622-8866
e-ISSN : 2721-9550

BEBERAPA ALGORITMA PELABELAN GRACEFUL UNTUK GRAF CATERPILLAR

SOME GRACEFUL LABELING ALGORITHM FOR CATERPILLAR GRAPHS

Regina N. Pakpahan[1], Patricia V. J. Runtu[2], Meidy A. Kuron[3]

[1]Universitas Negeri Manado
Tondano, Sulawesi Utara, Indonesia
regina.natalia@unima.ac.id

[2] Universitas Negeri Manado
Tondano, Sulawesi Utara, Indonesia
patricia_runtu@unima.ac.id

[3] Universitas Negeri Manado
Tondano, Sulawesi Utara, Indonesia
meidykuron@unima.ac.id

ABSTRACT

Graceful labeling, first introduced by Rosa as β-labeling. A graceful labeling (or β-labeling) on a graph G involves assigning labels to its set of vertices, forming an injective function f that maps each vertex to the set of non-negative integers {0, 1, 2, ..., |E(G)|}, where |E(G)| denotes the number of edges in G. This induces a bijective function f that maps the edges of G to the set of positive integers {1,2,...,|E(G)|} which the edges label obtained by absolute number of the subtraction between 2 neighboring vertex labels. One renowned conjecture proposed by Kotzig-Ringel-Rosa, known as the Graceful Tree Conjecture (GTC), posits that all trees are graceful. To this day, this remains an open problem, challenging researchers to substantiate its validity. The quest for graceful labeling, particularly for specific types of trees, continues to be an active zona of research. Notably, caterpillar graphs have been established as graceful. It is worth noting that not all graphs possess a unique labeling. For instance, in the case of graceful labeling for caterpillar graphs, there exist four distinct methods, which will be elucidated algorithmically in this article. By demonstrating various approaches to labeling caterpillar graphs, it is hoped that this concept can be extended to other graceful labelings, ultimately contributing to the identification of more graceful trees*

Keywords : *graph labeling, graceful labeling, caterpillar graph*

1. PENDAHULUAN

Pelabelan graceful diperkenalkan oleh Rosa[1] pertama kali dengan nama pelabelan β. Pelabelan β selanjutnya dikenal dengan istilah pelabelan graceful. Pelabelan graceful (atau pelabelan β) pada graf G adalah pelabelan pada himpunan simpul dengan ketentuan membentuk fungsi *f* injektif yang memetakan setiap simpul pada elemen himpunan bilangan bulat {0, 1, 2, ..., |E(G)|} dengan |E(G)| adalah banyaknya busur yang ada pada graf G, sedemikian sehingga menginduksi fungsi *f** bijektif dimana fungsi *f** adalah fungsi yang memetakan busur-busur yang ada pada graf G pada himpunan bilangan asli {1,2,...,|E(G)|} dengan ketentuan label busur yang diperoleh adalah mutlak dari pengurangan antara 2 label simpul yang bertetangga[2]. Salah satu konjektur terkenal yang dikemukakan oleh Kotzig-Ringel-Rosa[3], yang dikenal dengan *Graceful Tree Conjecture* (GTC) mengatakan bahwa semua graf pohon adalah graceful. Konjektur ini sampai sekarang masih menjadi masalah terbuka bagi para peneliti untuk membuktikan kebenarannya, dan pencarian pelabelan graceful untuk beberapa jenis pohon tertentu masih menjadi subjek penelitian aktif. Salah satu jenis pohon yang sudah dibuktikan merupakan graceful yaitu graf caterpillar. Graf caterpillar adalah pohon yang jika semua simpul berderajat satu dihapus maka yang tertinggal adalah suatu lintasan[4]. Tidak selamanya pelabelan suatu graf itu tunggal. Seperti contoh, pada pelabelan graceful untuk graf caterpillar. Ada 4 cara berbeda pelabelan graceful untuk graf caterpillar yang akan dibuktikan dalam bentuk algoritma pada artikel ini. Dengan menunjukkan beragam cara berbeda untuk melabeli graf caterpillar, diharapkan selanjutnya konsep yang sama bisa dikombinasikan untuk pelabelan-pelabelan graceful lainnya, agar semakin banyak graf pohon yang bisa dibuktikan merupakan graceful.

2. KAJIAN PUSTAKA

Pelabelan graceful pertama kali diperkenalkan oleh Rosa[1] dengan nama pelabelan β. Dalam papernya Rosa memperkenalkan 4 pelabelan graf: pelabelan α, pelabelan β, pelabelan σ, pelabelan ρ. Hirarki Rosa adalah hirarki dari keempat pelabelan tersebut, yaitu sebagai berikut:

$$\text{Pelabelan } \alpha \rightarrow \text{Pelabelan } \beta \rightarrow \text{Pelabelan } \sigma \rightarrow \text{Pelabelan } \rho$$

Sebagai contoh, tiap pelabelan α juga merupakan pelabelan β, pelabelan σ, dan pelabelan ρ. Tetapi pelabelan β belum tentu merupakan pelabelan α. Lebih jelasnya, Rosa mendefinisikan misalkan O_G adalah pelabelan dari graf G dengan n busur (a_i adalah label dari simpul v_i di O_G) dan memenuhi syarat-syarat berikut:

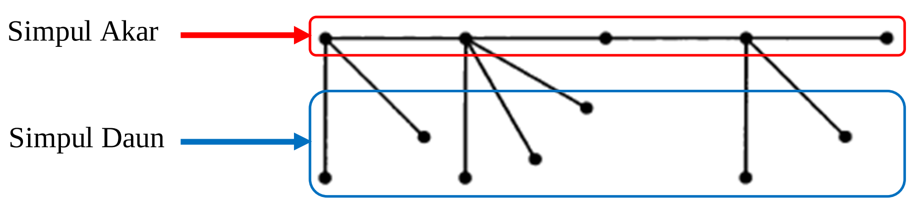
a) $V_{O_G} \subset \{0, 1, \ldots, n\}$;
b) $V_{O_G} \subset \{0, 1, \ldots, 2n\}$;
c) $H_{O_G} \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$;
d) $H_{O_G} \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, dimana $x_i = i$ atau $x_i = 2n + 1 - i$,
e) Ada x, dengan $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$, sedemikian sehingga untuk sebarang busur (v_i, v_j) dari graf G, salah satu syarat $a_i \leq x$, $a_j > x$, *atau* $a_i > x$, $a_j \leq x$ berlaku.

Pelabelan yang memenuhi syarat:

(a), (c), (e)	disebut pelabelan α
(a), (c)	disebut pelabelan β
(b), (c)	disebut pelabelan σ
(b), (d)	disebut pelabelan ρ

Salah satu konjektur terkenal yang sampai saat ini menjadi *open problem* dalam topik pelabelan graf dikenal dengan Kotzig-Ringel-Rosa[3], yaitu *Graceful Tree Conjecture* (GTC). *Graceful Tree Conjecture* mengatakan bahwa semua graf pohon adalah graceful. Dalam upaya untuk membuktikan konjektur ini, para peneliti telah membuktikan berbagai macam graf pohon adalah graceful. Salah satunya adalah graf caterpillar.

Menurut Haviar, M., Ivaska, M[5], graf caterpillar adalah graf pohon yang jika simpul-simpul daun (simpul berderajat 1) dihapus, akan menghasilkan graf lintasan. Sedangkan Md Momin Al Aziz dkk[6] mengatakan bahwa graf caterpillar adalah graf lintasan dengan 2 daun atau graf pohon dimana semua simpul berderajat 1 atau 2. Graf lintasan yang dimaksud disebut *backbone* dari graf caterpillar. Dalam graf caterpillar, terdapat istilah simpul daun dan simpul akar. **Simpul daun** adalah simpul berderajat 1 pada graf caterpillar. Sedangkan **simpul akar** adalah simpul-simpul pada graf lintasan yang terbentuk jika simpul-simpul daun dihapus.[7]. Gambar 1 di bawah ini merupakan contoh dari graf caterpillar.



Gambar 1. Graf Caterpillar

Rosa[1] telah membuktikan dalam artikelnya bahwa graf caterpillar adalah graceful. Selain itu, Haviar, M., Ivaska, M[5] juga telah membuktikan dalam artikelnya bahwa graf caterpillar adalah graceful seperti di bawah ini.

Teorema 1. (Haviar, M., Ivaska, M[5])

Graf G berukuran m adalah caterpillar jika dan hanya jika terdapat barisan pelabelan (j_1, j_2, … , j_m) dari G sedemikian sehingga

$$0 \le j_i - j_{i+1} \le 1 \text{ untuk setiap } i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$$

3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan. Menurut Sugiyono[8] penelitian kepustakaan merupakan kajian teoritis, referensi serta literatur ilmiah lainnya yang berkaitan dengan budaya, nilai dan norma yang berkembang pada situasi sosial yang diteliti.

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian studi literatur. Metode studi literatur adalah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat, serta mengelolah bahan penelitian.[9]

Menurut Kuhlthau dalam Mirzaqon dan Purwoko[10], langkah-langkah metode penelitian kepustakaan adalah sebagai berikut:

1. Pemilihan topik
2. Eksplorasi informasi
3. Menentukan fokus penelitian
4. Pengumpulan sumber data
5. Persiapan penyajian data
6. Penyusunan laporan

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini, peneliti akan membahas 4 cara berbeda untuk melabeli graf caterpillar dengan pelabelan graceful. Misalkan sebuah graf G, memiliki:

a_x : Simpul-simpul akar pada graf G, dengan x = 1, 2, … , p, dimana p adalah banyaknya simpul akar. Ketentuan urutan simpul-simpul akar dilihat dari kiri ke kanan atau dari atas ke bawah.

d_x : Simpul-simpul daun pada graf G, dengan x adalah indeks dari simpul akar dimana simpul daun tersebut terhubung dengan q_x adalah banyaknya simpul daun dari simpul akar x.

n : banyaknya simpul di graf G. ($n = p + q_1 + q_2 + \dots + q_p$)

k : $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$

l : $\left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$

Maka:

Algoritma 1. *top down* dengan simpul 0 berada di simpul akar pertama.

1. Beri label a_1 dengan 0.
2. Beri label a_x dengan $n - \sum_{i=1}^{k}(q_{2i-1} + 1)$, dengan x bilangan genap, dan $x \le$ p.
3. Beri label a_x dengan $\sum_{i=1}^{k}(q_{2i} + 1)$, dengan x bilangan ganjil, $x > 1$, dan $x \le$ p.
4. Beri label d_x untuk x bilangan genap dan $x <$ p berurutan dimulai dengan label terkecil yang belum dipilih.

Untuk kasus $q_2 \neq 0$, maka pelabelan dimulai d_2 dari angka 1, 2, … , q_2, dan dilanjutkan dengan melabeli d_x dimulai dari $a_{x-1} + 1, \dots, a_{x-1} + q_x$, $x > 2$

Untuk kasus $q_2 = 0$, maka pelabelan dimulai dari d_4 dari angka 2, 3, …, q_4 untuk p > 3, dan dilanjutkan dengan melabeli d_x dimulai dari $a_{x-1} + 1, \dots, a_{x-1} + q_x$, $x > 4$.

5. Beri label d_x dengan x bilangan ganjil dan x < p berurutan dimulai dengan label terbesar yang belum dipilih, $n, n-1, \dots, n-q_1$, dan dilanjutkan dengan melabeli d_x dimulai dari $a_{x-1} - 1, \dots, a_{x-1} - q_x$, $x > 1$.
6. Beri label d_p dengan:
   untuk p bilangan ganjil dimulai dari $a_p + 1, \dots, a_p + q_p$.
   untuk p bilangan genap dimulai dari $a_p - 1, \dots, a_p - q_p$.

Algoritma 2. *top down* dengan simpul n berada di simpul akar pertama.

1. Beri label a_1 dengan n.
2. Beri label a_x dengan $\sum_{i=1}^{k}(q_{2i-1} + 1)$, dengan x bilangan genap, dan $x \leq$ p.
3. Beri label a_x dengan $n - \sum_{i=1}^{k}(q_{2i} + 1)$, dengan x bilangan ganjil, $x > 1$, dan $x \leq$ p.
4. Beri label d_x untuk x bilangan genap dan x < p berurutan dimulai dari $a_{x-1} - 1, \dots, a_{x-1} - q_x$.
5. Beri label d_x dengan x bilangan ganjil dan x < p berurutan dimulai dengan label terkecil 0, 1, …
   Untuk kasus $q_1 \neq 0$, maka pelabelan dimulai d_1 dari angka 0, 1, … , $q_1 - 1$, dan dilanjutkan dengan melabeli d_x dimulai dari $a_{x-1} + 1, \dots, a_{x-1} + q_x$, $x > 1$
   Untuk kasus $q_1 = 0$, maka pelabelan dimulai dari d_3 dari angka 1, 2, …, q_3 untuk p > 3, dan dilanjutkan dengan melabeli d_x dimulai dari $a_{x-1} + 1, \dots, a_{x-1} + q_x$, $x > 3$
6. Beri label d_p dengan:
   untuk p bilangan ganjil dimulai dari $a_p - 1, \dots, a_p - q_p$
   untuk p bilangan genap dimulai dari $a_p + 1, \dots, a_p + q_p$

Algoritma 3. *bottom up* dengan simpul 0 berada di simpul akar terakhir.

1. Beri label a_p dengan 0.

Untuk p ganjil:

2. Beri label a_x dengan $\sum_{i=1}^{l}(q_{2i} + 1) - \sum_{i=1}^{k}(q_{2i} + 1)$, dengan x bilangan ganjil.
3. Beri label a_x dengan $a_1 + \sum_{i=1}^{k}(q_{2i-1} + 1)$, dengan x bilangan genap
4. Beri label d_x untuk x bilangan ganjil dan x < p dimulai dari $a_1 + 1, \dots, a_1 + q_1$, dan dilanjutkan dengan melabeli d_x dimulai dari $a_{x-1} + 1, \dots, a_{x-1} + q_x$, $x > 1$.
5. Beri label d_x dengan x bilangan genap dan x < p berurutan dimulai dari $a_{x-1} - 1, \dots, a_x - q_x$
6. Beri label d_p dimulai dari label terbesar $n, n-1, \dots, n-q_p$.

Untuk p genap:

2. Beri label a_x dengan $\sum_{i=1}^{l}(q_{2i+1} + 1) - \sum_{i=2}^{k}(q_{2i-1} + 1)$, dengan x bilangan genap
3. Beri label a_x dengan $a_2 + (q_1 + 1) + \sum_{i=1}^{k}(q_{2i} + 1)$, dengan x bilangan ganjil
4. Beri label d_x untuk x bilangan ganjil dan x < p dimulai dari $a_1 - 1, \dots, a_1 - q_1$, dan dilanjutkan dengan melabeli d_x dimulai dari $a_{x-1} - 1, \dots, a_{x-1} - q_x$, $x > 1$.
5. Beri label d_x dengan x bilangan genap dan x < p berurutan dimulai dari $a_{x-1} + 1, \dots, a_{x-1} + q_x$, $x>1$.
6. Beri label d_p dimulai dari label terbesar $n, n-1, \dots, n - q_p$

Algoritma 4. *bottom up* dengan simpul n berada di simpul akar terakhir.

1. Beri label a_p dengan n.

Untuk p ganjil:

2. Beri label a_x dengan $(\sum_{i=1}^{l}(q_{2i+1} + 1)) - (\sum_{i=2}^{k}(q_{2i} + 1)) - 1$, dengan x bilangan genap
3. Beri label a_x dengan $a_2 + (q_1 + 1) + \sum_{i=1}^{k}(q_{2i} + 1)$, dengan x bilangan ganjil.
4. Beri label d_x untuk x bilangan ganjil dan $x < p$ dimulai dari $a_1 - 1, \ldots, a_1 - q_1$, dan dilanjutkan dengan melabeli d_x dimulai dari $a_{x-1} - 1, \ldots, a_{x-1} - q_x$, $x > 1$.
5. Beri label d_x dengan x bilangan genap dan $x < p$ berurutan dimulai dari $a_{x-1} + 1, \ldots, a_x + q_x$
6. Beri label d_p dimulai dari label terkecil $0, 1, \ldots q_p - 1$.

Untuk p genap:

2. Beri label a_x dengan $(\sum_{i=1}^{l}(q_{2i} + 1)) - (\sum_{i=2}^{k}(q_{2i-1} + 1)) - 1$, dengan x bilangan ganjil
3. Beri label a_x dengan $a_1 + (q_1 + 1) + \sum_{i=2}^{k}(q_{2i} + 1)$, dengan x bilangan genap
4. Beri label d_x untuk x bilangan ganjil dan $x < p$ dimulai dari $a_1 + 1, \ldots, a_1 + q_1$, dan dilanjutkan dengan melabeli d_x dimulai dari $a_{x-1} + 1, \ldots, a_{x-1} + q_x$, $x > 1$
5. Beri label d_x dengan x bilangan genap dan $x < p$ berurutan dimulai dari $a_{x-1} - 1, \ldots, a_{x-1} - q_x$, $x>1$.
6. Beri label d_p dimulai dari label terkecil $0, 1, \ldots q_p - 1$.

Bukti.

Untuk membuktikan bahwa graf adalah graceful, maka harus ditunjukkan:

(1) Ada fungsi f injektif yang memetakan setiap simpul pada elemen himpunan bilangan bulat $\{0, 1, 2, ..., |E(G)|\}$ dengan $|E(G)|$ adalah banyaknya busur yang ada pada graf G

(2) Ada fungsi f^* bijektif dimana fungsi f^* adalah fungsi yang memetakan busur-busur yang ada pada graf G pada himpunan bilangan asli $\{1,2,...,|E(G)|\}$ dengan ketentuan label busur yang diperoleh adalah mutlak dari pengurangan antara 2 label simpul yang bertetangga.

Pada Algortima 1:

Pembuktian (1) jelas dari algoritma, karena pelabelan dimulai dari a_1 dengan label 0, kemudian dilanjutkan dengan melabeli dengan $1, 2, \ldots n$. Untuk kasus p ganjil, maka dimulai dari $a_1, d_2, a_3, d_4, \ldots, d_{p-1}, a_p, dp , a_{p-1}, d_{p-2}, \ldots , d_1$. Sedangkan untuk kasus p genap, maka dimulai dari $a_1, d_2, a_3, d_4, \ldots, a_{p-1}, d_p, a_p, d_{p-2}$ untuk $d_2 , a_3, \ldots , d_p$.

Pembuktian (2) pelabelan akan menghasilkan pasangan-pasangan dimana a_x akan berpasangan dengan d_{x+1}. Dimulai dari a_1 dan d_1, dimana $a_1 = 0$, dan d_1 yang dimulai dari bilangan terbesar n (Langkah 5) akan menghasilkan label busur terbesar, n, yang akan menurun hingga pada a_p dan d_p, dimana langkah keenam jelas menunjukkan label busur terkecil yaitu 1.

Pada Algortima 2:

Pembuktian (1) jelas dari algoritma, karena pelabelan dimulai dari a_1 dengan label 0, kemudian dilanjutkan dengan melabeli dengan $1, 2, \ldots n$. Untuk kasus p ganjil, maka dimulai dari $a_1, d_2, a_3, d_4, \ldots, d_{p-1}, a_p, dp , a_{p-1}, d_{p-2}, \ldots , d_1$. Sedangkan untuk kasus p genap, maka dimulai dari $a_1, d_2, a_3, d_4, \ldots, a_{p-1}, d_p, a_p, d_{p-2}$ untuk $d_2 , a_3, \ldots , d_p$.

Pembuktian (2) pada algoritma 2 sama dengan algoritma 1, karena nilai mutlak dari hasil pengurangan 2 simpul yang bertetangga akan bernilai sama. Artinya label busur algoritma 1 dan algoritma 2 sama.

Pada Algortima 3:

Pembuktian (1) jelas dari algoritma, karena pelabelan dimulai dari a_1 dengan label 0, kemudian dilanjutkan dengan melabeli dengan $1, 2, \ldots n$. Untuk kasus p ganjil, maka dimulai dari $a_1, d_2, a_3, d_4, \ldots, d_{p-1}, a_p, dp , a_{p-1}, d_{p-2}, \ldots , d_1$. Sedangkan untuk kasus p genap, maka dimulai dari $a_1, d_2, a_3, d_4, \ldots, a_{p-1}, d_p, a_p, d_{p-2}$ untuk $d_2 , a_3, \ldots , d_p$.

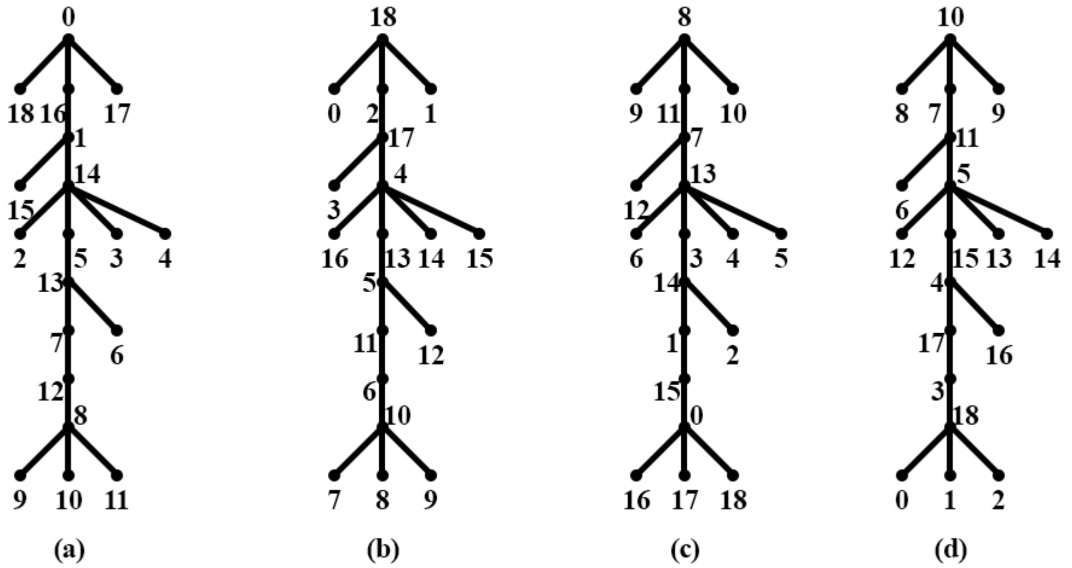
Pembuktian (2) pelabelan akan menghasilkan pasangan-pasangan dimana a_x akan berpasangan dengan d_{x+1}. Dimulai dari a_1 dan d_1, dimana langkah keempat jelas menunjukkan label terkecil, label busur akan membesar hingga pada a_p dan d_p dimana $a_p = 0$ dan d_p dimulai dengan label terbesar n (Langkah 6) akan menghasilkan label busur terbesar n.

Pada Algortima 4:

Pembuktian (1) jelas dari algoritma, karena pelabelan dimulai dari a_1 dengan label 0, kemudian dilanjutkan dengan melabeli dengan 1, 2, … n. Untuk kasus p ganjil, maka dimulai dari a_1, d_2, a_3, d_4, …, d_{p-1}, a_p, dp , a_{p-1}, d_{p-2}, … , d_1. Sedangkan untuk kasus p genap, maka dimulai dari a_1, d_2, a_3, d_4, …, a_{p-1}, d_p, a_p, d_{p-2} untuk d_2 , a_3, … , d_p.

Pembuktian (2) pada algoritma 4 sama dengan algoritma 3, karena nilai mutlak dari hasil pengurangan 2 simpul yang bertetangga akan bernilai sama. Artinya label busur algoritma 3 dan algoritma 4 sama.

Berikut adalah contoh graf caterpillar yang sudah diberi pelabelan graceful berbeda sesuai masing-masing algoritma



Gambar 2. (a) Pelabelan dengan algoritma 1, (b) Pelabelan dengan algoritma 2, (c) Pelabelan dengan algoritma 3, (d) Pelabelan dengan algoritma 4

5. KESIMPULAN

Graf caterpillar merupakah graf yang mempunyai pelabelan graceful. Cara melabeli graf caterpillar secara graceful ada 4 cara berbeda, yaitu dengan cara *top down* dengan simpul 0 berada di simpul akar pertama, dengan cara *top down* dengan simpul *n* berada di simpul akar pertama, dengan cara *bottom up* dengan simpul 0 berada di simpul akar terakhir, dan dengan cara *bottom up* dengan simpul *n* berada di simpul akar terakhir. Penelitian ini diharapkan bisa berkontribusi untuk menunjukkan ada beragam cara untuk melabeli graf caterpillar, dan selanjutnya bisa dikombinasikan dengan pelabelan-pelabelan graceful lainnya, agar semakin banyak graf pohon yang bisa dibuktikan merupakan graceful, dalam rangka untuk membuktikan *Graceful Tree Conjecture*. Pada penelitian di masa yang akan datang, diharapkan peneliti selanjutnya bisa menemukan algoritma pelabelan graf caterpillar jika simpul 0 nya berada di sebarang simpul akar dari graf caterpillar atau sebarang simpul daun dari graf caterpillar.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Rosa, A. (1967). *On certain valuations of the vertices of a graph.* Jurnal Theory of Graphs, Proc. Internat. Symposium,Rome, 1966, Gordonand Breach, N.Y. and Dunod Paris, pp. 349–355.

[2] N. Parvathi & S. Vidyanandini (2014) *Graceful Labeling of a Tree from Caterpillars*, Journal of Information and Optimization Sciences, 35:4, 387-393, DOI: 10.1080/02522667.2014.961811

[3] G, Ringel. (1963). *Theory of graphs and its applications*, Proceedings of the Symposium Smolenice. held in Smolenice in June, 1963. New York, pp. 85–90.

[4] Hossain, F., Aziz, M.A., & Kaykobad, M. (2014) *New Classes of Graceful trees*, Journal of Discrete Mathematics, vol. 2014, Article ID 194759, 6 pages. DOI: 10.1155/2014/194759

[5] Haviar, M., Ivaska, M. (2014). *Vertex Labellings of Simple Graph.* Research and Exposition in Mathematics. Banska Bystrica (34) pp. 72–74.

[6] M. M. Al Aziz, M. F. Hossain, T. Faequa and M. Kaykobad,. (2014). *Graceful labeling of trees: Methods and applications*. 17th International Conference on Computer and Information Technology (ICCIT), Dhaka, Bangladesh, 2014. pp. 92-95. DOI: 10.1109/ICCITechn.2014.7073154.

[7] Sugeng, K.A., Slamet, S., Silaban, D.R. (2014). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Depok: Departemen Matematika FMIPA UI.

[8] Sugiyono. (2012). *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D.* Bandung: Alfabeta.

[9] Zed, M. (2008). *Metode Penelitian Kepustakaan.* Jakarta : Yayasan Obor Indonesia.

[10] Mirzaqon. T, A dan Budi Purwoko. (2017). *Studi Kepustakaan Mengenai Landasan Teori dan Praktik Konseling Expressive Writing*. Jurnal BK Unesa, 8(1).