SOSCIED Vol. 7 No. 1 Juli 2024
p-ISSN : 2622-8866
e-ISSN : 2721-9550

ALGORITMA PELABELAN GRACEFUL UNTUK GRAF BINTANG MULTI-LEVEL

GRACEFUL LABELING ALGORITHM FOR MULTI-LEVEL STAR GRAPH

Regina N. Pakpahan [1], Maria Y. Manuel [2]

[1]Universitas Negeri Manado
Tondano, Sulawesi Utara, Indonesia
regina.natalia@unima.ac.id

[2] Universitas Negeri Manado
Tondano, Sulawesi Utara, Indonesia
mariamanuel@unima.ac.id

ABSTRACT

Graph theory is a topic in mathematics that is still relatively new and developing rapidly. Graph theory is used to simplify and solving problems like connection, networking, travelling or flow. One of the very interesting topics in graph theory is graph labeling. Graceful labeling first introduced by Rosa as β-labeling. A graceful labeling (or β-labeling) on a graph G involves assigning labels to its set of vertices, forming an injective function f that maps each vertex to the set of non-negative integers {0, 1, 2, ..., |E(G)|}, where |E(G)| denotes the number of edges in G. This induces a bijective function f that maps the edges of G to the set of positive integers {1,2,...,|E(G)|} which the edges label obtained by absolute number of the subtraction between 2 neighboring vertex labels. The Graceful Tree Conjecture (GTC) posits that all trees can be gracefully labeled, a hypothesis still unproven. The quest for graceful labeling, particularly for specific types of trees, continues to be an active zona of research. One of the graph that already proven can be labeled with graceful labeling is star graph. Now we gonna prove graceful labeling for star graph, if each leaf in the star graph is connected to m new leaves. We call it multi-level star graph. Exploring these methods aims to extend the concept to other graphs, contributing to the identification of more gracefully labeled trees.*

Keywords : *graph labeling, graceful labeling, star graph*

1. PENDAHULUAN

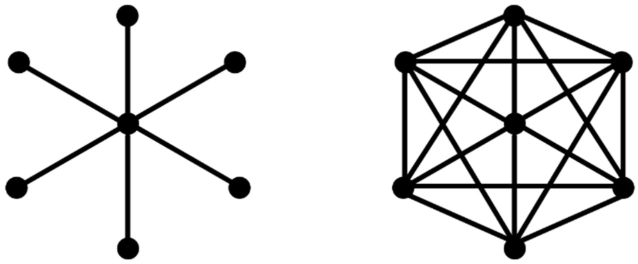
Pelabelan graceful diperkenalkan oleh Rosa[1] pertama kali dengan nama pelabelan β. Pelabelan β selanjutnya dikenal dengan istilah pelabelan graceful. Pelabelan graceful pada graf G adalah pelabelan pada himpunan simpul dengan ketentuan membentuk fungsi *f* injektif yang memetakan setiap simpul pada elemen himpunan bilangan bulat {0, 1, 2, ..., |E(G)|} dengan |E(G)| adalah banyaknya busur yang ada pada graf G, sedemikian sehingga menginduksi fungsi *f** bijektif dimana fungsi *f** adalah fungsi yang memetakan busur-busur yang ada pada graf G pada himpunan bilangan asli {1,2,...,|E(G)|} dengan ketentuan label busur yang diperoleh adalah mutlak dari pengurangan antara 2 label simpul yang bertetangga.[2] Salah satu konjektur terkenal yang dikemukakan oleh Kotzig-Ringel-Rosa[3], yang dikenal dengan *Graceful Tree Conjecture* (GTC). GTC mengatakan bahwa semua graf pohon adalah graceful. Namun sampai saat ini, konjektur tersebut masih belum bisa dibuktikan, dan menjadi *open problem* bagi para peneliti. Salah satu jenis pohon yang sudah dibuktikan merupakan graceful yaitu graf bintang. Graf bintang adalah pohon dengan banyaknya simpul $n + 1$, memiliki satu simpul pusat v_0 yang terhubung dengan n simpul daun.[4]. Graf bintang sudah dibuktikan merupakan *graceful*. Kali ini kita akan membuktikan pelabelan graceful untuk graf bintang jika masing-masing daun di graf bintang dihubungkan dengan *m* daun baru, yang selanjutnya akan kita sebut graf bintang multi-level.

2. KAJIAN PUSTAKA

A. Jenis-Jenis Graf

Menurut Sugeng, dkk[4], graf bintang (S_n) adalah graf pohon dengan banyaknya simpul n+1, memiliki satu simpul pusat v_0 yang terhubung dengan n simpul daun. Dalam graf bintang, terdapat istilah simpul pusat v_0 dan n simpul daun. **Simpul pusat (v_0)** adalah simpul yang berada di tengah, dan terhubung dengan semua simpul-simpul daun pada graf bintang. Sedangkan **simpul daun** adalah simpul-simpul pada graf bintang yang terhubung dengan simpul pusat.

Graf lengkap adalah graf sederhana di mana setiap pasangan simpul saling bertetangga. Graf lengkap dengan n simpul dilambangkan dengan K_n.[5]



Gambar 1. (a) Graf Bintang S_6, (b) Graf Lengkap K_6

B. Operasi Pada Graf

Komplemen $\bar{G}$ dari graf G adalah salah satu operasi dalam graf. $\bar{G}$ memiliki himpunan simpul yang sama dengan graf G, dimana simpul x dan y bertetangga di $\bar{G}$ jika dan hanya jika kedua simpul tersebut tidak bertetangga di G.[6]

Dalam graf, terdapat juga operasi komposisi. Komposisi adalah salah satu dari banyak operasi yang dapat dilakukan pada graf untuk menghasilkan graf baru dari dua atau lebih graf yang ada. Misalkan graf $G_1=(V_1, E_1)$ dan $G_2=(V_2, E_2)$ adalah 2 graf dengan himpunan simpul V_1 dan V_2 dan himpunan busur E_1 dan E_2. Graf komposisi $G_1 \circ G_2$ adalah graf yang memiliki himpunan simpul yang merupakan pasangan terurut dari simpul-simpul G_1 dan G_2.[7]

C. Pelabelan Graceful

Pelabelan graceful pertama kali diperkenalkan oleh Rosa[1] dengan nama pelabelan β. Dalam papernya Rosa memperkenalkan 4 pelabelan graf: pelabelan α, pelabelan β, pelabelan σ, pelabelan ρ. Hirarki Rosa adalah hirarki dari keempat pelabelan tersebut, yaitu sebagai berikut:

Pelabelan α → Pelabelan β → Pelabelan σ → Pelabelan ρ

Sebagai contoh, tiap pelabelan α juga merupakan pelabelan β, pelabelan σ, dan pelabelan ρ. Tetapi pelabelan β belum tentu merupakan pelabelan α. Lebih jelasnya, Rosa mendefinisikan misalkan O_G adalah pelabelan dari graf G dengan n busur (a_i adalah label dari simpul v_i di O_G) dan memenuhi syarat-syarat berikut:

a) $V_{O_G} \subset \{0, 1, \dots, n\}$;
b) $V_{O_G} \subset \{0, 1, \dots, 2n\}$;
c) $H_{O_G} \equiv \{1, 2, \dots, n\}$;
d) $H_{O_G} \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, dimana $x_i = i$ atau $x_i = 2n + 1 - i$,
e) Ada x, dengan $x \in \{0, 1, \dots, n\}$, sedemikian sehingga untuk sebarang busur (v_i, v_j) dari graf G, salah satu syarat $a_i \le x$, $a_j > x$, *atau* $a_i > x$, $a_j \le x$ berlaku.

Pelabelan yang memenuhi syarat:

(a), (c), (e) disebut pelabelan α

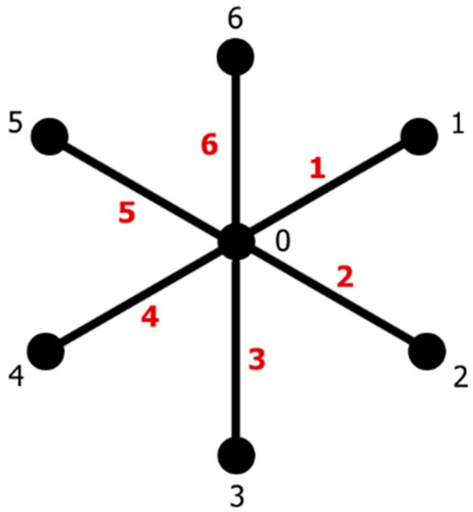
(a), (c) disebut pelabelan β

(b), (c) disebut pelabelan σ

(b), (d) disebut pelabelan ρ

Salah satu konjektur terkenal yang sampai saat ini menjadi *open problem* dalam topik pelabelan graf dikenal dengan Kotzig-Ringel-Rosa [3], yaitu *Graceful Tree Conjecture* (GTC). *Graceful Tree Conjecture* mengatakan bahwa semua graf pohon adalah graceful. Dalam upaya untuk membuktikan konjektur ini, para peneliti telah membuktikan berbagai macam graf pohon adalah graceful. Salah satunya adalah graf bintang.

Haviar, dkk[8] telah membuktikan dalam artikelnya bahwa graf bintang adalah graceful. Pelabelan graf bintang dimulai dengan memberi label 0 pada simpul pusatnya, dilanjutkan dengan melabeli *n* simpul daunnya dimulai dari label 1 hingga label *n*. Berikut adalah contoh graf bintang yang telah dilabeli.



Gambar 2. Graf Bintang yang telah dilabeli

Berikutnya, akan didefinisikan graf baru yang merupakan multi-level dari graf bintang, dan akan dibuktikan merupakan graceful.

3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan. Menurut Sugiyono[9] penelitian kepustakaan merupakan kajian teoritis, referensi serta literatur ilmiah lainnya yang berkaitan dengan budaya, nilai dan norma yang berkembang pada situasi sosial yang diteliti.

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian studi literatur. Metode studi literatur adalah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat, serta mengelolah bahan penelitian.[10]

Menurut Kuhlthau (2002) dalam Mirzaqon dan Purwoko[11], langkah-langkah metode penelitian kepustakaan adalah sebagai berikut:

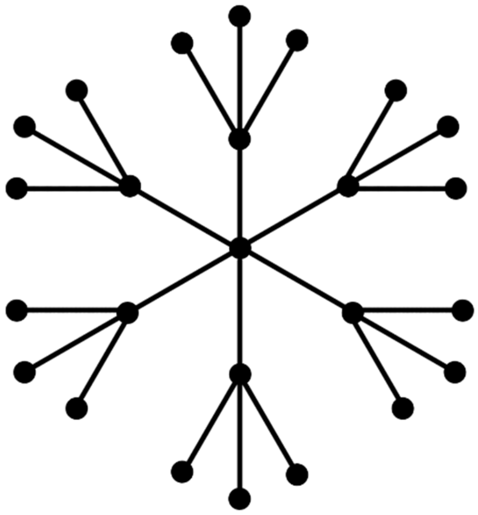
1. Pemilihan topik
2. Eksplorasi informasi
3. Menentukan fokus penelitian
4. Pengumpulan sumber data

5. Persiapan penyajian data
6. Penyusunan laporan

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini, peneliti akan memberikan algoritma serta pembuktian pelabelan graceful untuk graf bintang multi-level.

Definisi 1. Graf Bintang Multi-Level. Graf bintang multi-level adalah graf bintang, yang dikomposisikan dengan komplemen dari graf lengkap K_m. Dengan kata lain, masing-masing daunnya dihubungkan dengan *m* simpul baru ($S_n \circ \overline{K_m}$).



Gambar 3. Graf Bintang Multi-Level $S_6 \circ \overline{K_3}$

Teorema 1. Graf Bintang Multi-Level adalah graceful.

Sebelum menuliskan algoritma dan membuktikannya, pertama-tama akan disepakati terlebih dahulu keterangan berikut.

Simpul pusat (v_0) : simpul yang berada ditengah, yang menjadi pusat dari graf bintang

Simpul daun dalam (T_i) : simpul daun dari graf bintang awal, dengan $i = 1, 2, \dots, n$

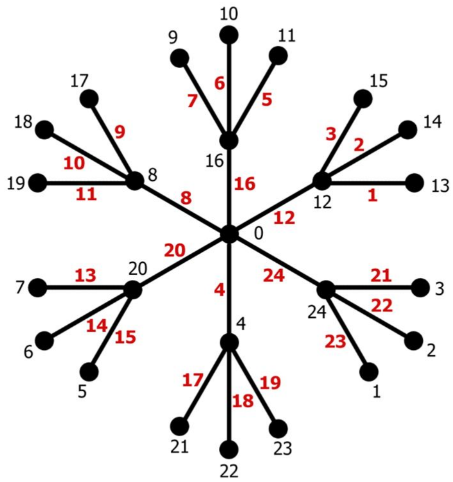
Simpul daun luar (T_{ij}) : simpul daun baru yang dihubungkan pada masing-masing simpul daun dalam, dengan $j = 1, 2, \dots, m$

Algoritma.

1. Labeli simpul pusat (v_0) dengan 0.
2. Labeli *m* simpul daun luar yang terhubung pada salah satu simpul daun dalam dengan 1, 2, … , m.
3. Labeli simpul daun dalam yang simpul daun luarnya belum diberi label dengan m+1.
4. Lanjutkan dengan melabeli *m* simpul daun luar yang terhubung pada salah satu simpul daun dalam yang belum diberi label dengan m+2, m+3, …, 2m+1.
5. Labeli simpul daun dalam yang simpul daun luarnya belum diberi label dengan 2m+2.
6. Lakukan pelabelan secara selang seling hingga pasangan T_i dan T_{ij} yang bersesuaian hanya salah satunya yang memiliki label. Jika *n* ganjil, maka hingga melabeli simpul daun luar dengan $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor m + \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor m + \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1, \dots, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil m + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. Jika *n* genap, maka hingga melabeli simpul daun dalam dengan $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil m + \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$.

7. Jika n ganjil, maka labeli simpul daun dalam yang bersesuaian dengan simpul daun luar yang terakhir dilabeli dengan $\left[\frac{n}{2}\right]m + \left[\frac{n}{2}\right]$. Jika n genap, maka labeli simpul daun luar yang bersesuaian dengan simpul daun dalam yang terakhir dilabeli dengan $\left[\frac{n}{2}\right]m + \left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]m + \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \dots, \left[\frac{n}{2} + 1\right]m + \left[\frac{n}{2}\right]$.
8. Lakukan kembali pelabelan secara selang seling simpul daun dalam dan simpul daun luar yang bersesuaian secara mundur, mulai dari label terbesar ke label terkecil.

   Berikut adalah contoh graf bintang yang diperbesar setelah diberi pelabelan graceful.



Gambar 4. Graf bintang multi-level yang telah dilabeli secara graceful

5. KESIMPULAN

Graf bintang multi-level merupakan graf yang mempunyai pelabelan graceful. Pelabelan dilakukan selang seling dimulai dari simpul daun luar kemudian simpul daun dalam sesuai dengan algoritma yang telah diberikan. Penelitian ini diharapkan bisa berkontribusi agar semakin banyak graf pohon yang bisa dibuktikan merupakan graceful, dalam rangka untuk membuktikan *Graceful Tree Conjecture*. Pada penelitian di masa yang akan datang, diharapkan peneliti selanjutnya bisa menemukan algoritma pelabelan graf pohon lainnya, terutama yang berhubungan dengan graf bintang multi-level, jika ada penambahan level lagi lebih dari 2 level, atau jika daun-daun baru yang ditambahkan tidak harus berjumlah sama.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Rosa, A. (1967). *On certain valuations of the vertices of a graph.* Jurnal Theory of Graphs, Proc. Internat. Symposium,Rome, 1966, Gordonand Breach, N.Y. and Dunod Paris, pp. 349–355.

[2] N. Parvathi & S. Vidyanandini (2014) *Graceful Labeling of a Tree from Caterpillars*, Journal of Information and Optimization Sciences, 35:4, 387-393, DOI: 10.1080/02522667.2014.961811

[3] G, Ringel. (1963). *Theory of graphs and its applications*, Proceedings of the Symposium Smolenice. held in Smolenice in June, 1963. New York, pp. 85–90.

[4] Sugeng, K.A., Slamet, S., Silaban, D.R. (2014). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Depok: Departemen Matematika FMIPA UI.

[5] Gladkov, L. (2018). Topics in graph theory. AMS/MAA Textbooks. , DOI: 10.1090/text/041/13

[6] Godsil, C., Royle, G. (2001). *Algebraic Graph Theory*. New York: Springer. pp 5–6

[7] Bondy, J., & Murty, U. (2008). *Graph Theory*, 1-582. DOI: 10.1007/978-1-84628-970-5.

[8] Haviar, M., Ivaska, M. (2014). *Vertex Labellings of Simple Graph*. Research and Exposition in Mathematics. Banska Bystrica (34) pp. 72–74.

[9] Sugiyono. (2012). *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D*. Bandung: Alfabeta.

[10] Zed, M. (2008). *Metode Penelitian Kepustakaan*. Jakarta : Yayasan Obor Indonesia.

[11] Mirzaqon. T, A dan Budi Purwoko. (2017). *Studi Kepustakaan Mengenai Landasan Teori dan Praktik Konseling Expressive Writing*. Jurnal BK Unesa, 8(1).